Sup-型関数の方向微分と折れ線近似(非線形解析学と数理経済学の研究)

川崎, 英文

数理解析研究所講究録
第861巻 1994年 197-202

Sup-型関数の方向微分と折れ線近似

１９９３年１０月１日、京大数理研

研究集会、非線形解析学と数理経済学の研究

川崎英文（九州大学理学部）(Hidebumi Kawasaki)

著者は数年来、非線形計画問題に対する２次の最適性条件の研究に取り組み、これと関連して無限個の関数の上限として定義されるSup-型関数の２階微分の研究を行なってきた。まず最初に、後者のポイントを簡単な例を用いて説明する。

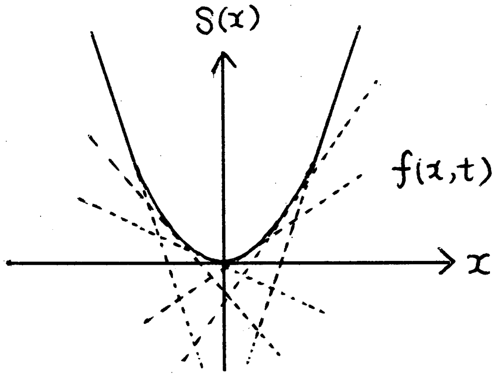
なお、以下において$[\alpha,\beta]$を有界閉区間とし、fは$R^n\times[\alpha,\beta]$上の連続関数とする。$f(x,t)$がxに関し微分可能なとき、その勾配行ベクトルを$f_x(x,t)$、Hesse行列を$f_{xx}(x,t)$で表す。また、$f(x,t)$のxにおけるy方向への方向微分を$f'_x(x,t;y)$で表し、$f(x,t)$の(x,t)における(y,τ)方向への方向微分を$f'(x,t;y,\tau)$で表す。

例１　$f(x,t):=2xt-t^2$について、

$$S(x):=\sup\{f(x,t);\ t\in[-1,1]\}=x^2,\quad if\quad |x|\leq 1.$$

よって、$S''(x)=2.$ しかし $f_{xx}(x,t)\equiv 0.$ これより、次のことが解る。

<u>$S''(x)$ と $f_{xx}(x,t)$ の間にはギャップがある。</u>



不等式制約を持つ非線形計画問題に対する２次の最適性条件を研究する際、このギャップに注意を払わなければならない。[6][7] [8][9]

一方、１階微分については、次の２つの結果がよく知られている。

定理１　$f_1, \ldots, f_m \in C^1(R^n)$ とし、$S(x) := \max f_i(x)$ とする。このとき、$S(x)$ の方向微分は

$$S'(x;y) = \max\{f_i'(x)y;\ f_i(x) = S(x)\}$$

と表される。

定理２ ([4])Tをコンパクトな距離空間、$f \in C(R^n \times T)$ とする。もし $f_x(x,t)$ が $R^n \times T$上連続ならば $S(x) = \sup\{f(x,t);\ t \in T\}$ について

$$S'(x;y) = \max\{f_x(x,t)y;\ t \in T(x)\}$$

ただし $T(x) := \{t \in T;\ f(x,t) = S(x)\}$.

これらの定理により次のことがわかる。

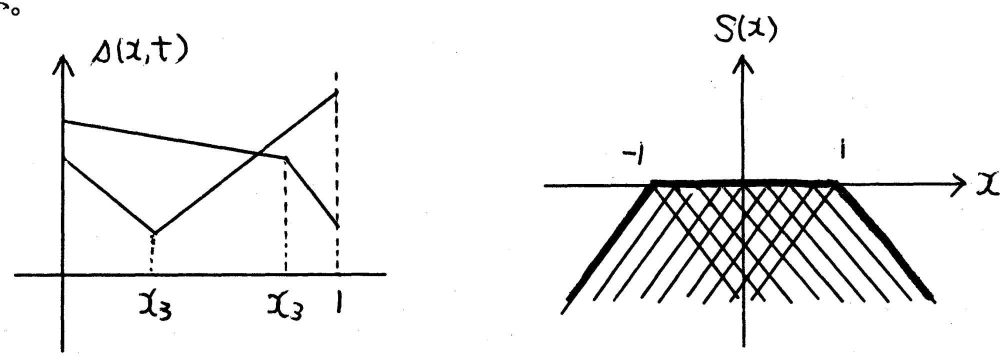
<u>$S'(x;y)$ は $f_x(x,t)$ で表現できる。</u>

ところで、最良近似問題のひとつに $b \in C[0,1]$ を折れ線で近似する問題がある。即ち、$x = (x_0, \ldots, x_3) \in R^4$, $s(x,t) := x_0 + x_1 t + x_2(t - x_3)_+$, ただし $a_+ := \max\{a, 0\}$ とするとき、

$$S(x) := \max\{|b(t) - s(x,t)|;\ t \in [0,1]\}\ \rightarrow \text{minimize}$$

この問題のポイントは、折れ線の角 x_3が動くことである。そのため $s(x,t)$ は x_3に関し非凸かつ微分不可能になる。

また、$s(x,t)$ の Clarke 微分 [2] と方向微分は必ずしも一致しない。実際、折れ線 $s(x,t)$ で、特に $x_0 = x_3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ をとると、$s(x,t) = -|t - x_3|$ となり、この関数は $t = x_3$において Clarke 微分と方向微分は一致しない。この意味でも、この最良近似問題は取り扱いにくい問題であると言える。さらに、次の例が示すような面白い性質を持つ。本稿では、この性質を<u>１次の包絡線効果</u>と呼ぶ。



例2　$f(x,t) := -|t-x|,\ x \in R,\ t \in [-1,1]$

$$S(x) := \max_{0\le t\le 1} f(x,t) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \ge 1, \\ 0, & |x| \le 1. \end{cases}$$

従って、$x \in (-1,1)$ において $S'(x;y) = 0$. しかし $f'_x(x,x;y) = -|y|$.

$$\max\{f'_x(x,t;y);\ t \in T(x)\} = f'_x(x,x;y) = -|y| < S'(x;y).$$

例2は次の事を示唆している。

<u>$f(x,t)$ が微分可能でないとき、$S'(x;y)$ と $f(x,t)$ の x に関する方向微分 $f'_x(x,t;y)$ の間にはギャップがある。</u>

このギャップを埋めるには、$f(x,t)$ の両変数 (x,t) に関する方向微分を考えるとよい。実際、例2において

$$f'(x,x;y,\tau) = -|y-\tau|$$

であるから

$$\max\{f'(x,t;y,\tau)\ ;\ t \in T(x)\} = 0 = S'(x;y).$$

となり、$S'(x;y)$ を $f'(x,t;y,\tau)$ で表すことができる。

以下において次の記号を用いる。

$$f(x,t) := b(t) - \{x_0 + x_1 t + x_2(t-x_3)_+\}. \tag{1}$$

$$\sigma(t) := \mathrm{sign} f(x,t)$$

$$S(x) := \sup\{|f(x,t)|\ ;\ t \in [0,1]\} \tag{2}$$

$$T_+(x) := \{t \in [0,1]\ ;\ S(x) = f(x,t)\} \quad \text{正端点集合}$$

$$T_-(x) := \{t \in [0,1]\ ;\ S(x) = -f(x,t)\} \quad \text{負端点集合}$$

$$T(x) := T_+(x) \cup T_-(x) \quad \text{端点集合}$$

両変数 (x,t) に関する方向微分を考えることにより、(1)(2) で定義される関数については、$S(x)$ の方向微分を表す公式が得られる。

定理3　$b \in C^2[0,1],\ 0 < x_3 < 1,\ b''(x_3) \ne 0$ とすると

$$S'(x;y) = \max\{\sigma(t) f'(x,t;y,\tau);\ t \in T(x),\ \tau \in R\}. \tag{3}$$

定理３を利用して、１個の動節点をもつ折れ線近似問題に対する局所最良近似の必要条件を導く事ができる。

$f(x,t)$ は直線 $t=x_3$上で角を持つから、$f'(x,t;y,\tau)$ を計算すると３つのケースに分れるが、次の連続関数$\alpha: T(x)\to R$ を用いる事により１つの式で表現出来る。ここで$\alpha(t)$ が連続になることは、下で述べる不整合性定理と関連して重要である。

$$\alpha(t) := \begin{cases} 0, & t < x_3, \\ x_1 - b'(t), & t = x_3, \\ -x_2, & t > x_3. \end{cases}$$

$f(x,t)$ が局所最良近似ならば

$$-S'(x;y) > 0 \tag{4}$$

なる方向 $y \in R^4$は存在しないので次の定理が得られる。

定理４ $b \in C^2[0,1]$, $0 < x_3 < 1$, $b''(x_3) \neq 0$ とする。もし $x \in R^4$が $S(x)$ の極小点ならば、次の不等式系は解 $y \in R^4$を持たない。

$$\sigma(t)\{y_0 + y_1 t + y_2(t - x_3)_+ + y_3\alpha(t))\} > 0 \quad \forall t \in T(x) \tag{5}$$

実は、無限個の不等式系 (5) の不整合性は高々５個の部分不等式系の不整合性に帰着され Ben-Tal et al [1]、記号 $a(t)^T := (1, t, (t-x_3)_+, \alpha(t))$ を用いる事により、次の結果が得られる。

定理５ $b \in C^2[0,1]$, $0 < x_3 < 1$, $b''(x_3) \neq 0$ とする。もし $s(x,t)$ が局所最良近似ならば、交互に符号が交代する $3 \le k \le 5$ 個の端点 $t_1 < \ldots < t_k$と正の乗数$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$が存在して

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sigma_i a(t_i) = 0.$$

更に、次の４つのいずれかが満たされる。

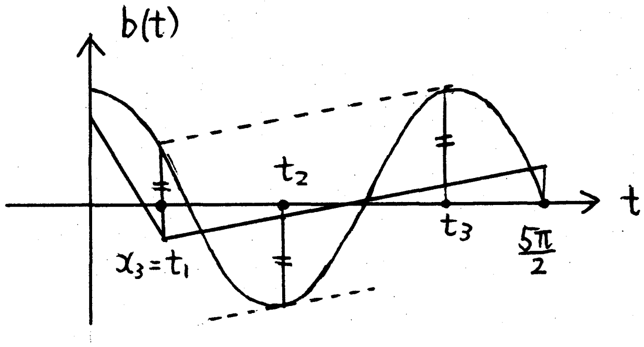
(1) $t_1 < t_2 < t_3 \le x_3$, $s_t(x,t_3) = b'(t_3)$
(2) $x_3 \le t_1 < t_2 < t_3$, $s_t(x,t_1) = b'(t_1)$
(3) $x_2 = 0$, $k = 4$
(4) $t_1 < t_2 < t_3 = x_3 < t_4 < t_5$

注意 1　Nürunberger et al [10][11] の結果との違いは、定理 5 は誤差関数 $b(t)-\{x_0+x_1t+x_2(t-x_3)_+\}$ の符号の交代性以外に次の条件を含むことである。

$$s_t(x,t_3)=b'(t_3),\quad s_t(x,t_1)=b'(t_1)$$

$$t_3=x_3$$

例えば、$b(t)=\cos t,\quad 0\le t\le 5\pi/2$ に対し、図の折れ線は節点 x_3の右側で誤差関数の符号が 2 回交代するが、$s_t(x,t_1)=b'(t_1)$ を満たさないので局所最良近似ではない。



注意 2　Correa, Seeger [3][12] Demyanov, Zabrodin [5] は (1) よりはるかに一般的な関数に対して (3) と同様の公式を導いた。彼らの結果は一般論としては優れているが、本稿の結果との決定的な違いは max ではなく sup である点である。この事は、$S(x)$ の最小化問題に対する最適性条件を導く際、重要である。つまり、公式 (3) において max を sup で置き代えると、(4) から (5) を導くことができない。

References

[1] Ben-Tal A., Rosinger E., Ben-Israel A., A Helly-type theorem and semiinfinite programming, in Constructive approaches to mathematical models. Academic Press, (1979).

[2] Clarke F.H., Generalized gradients and applications, Trans. Amer. Math. Society., vol. 205, pp. 247–262, (1975).

[3] Correa R., Seeger A., Directional derivative of a minimax function, Nonlinear Analysis, Theory and Appl., vol. 9, pp. 13–22, (1985).

[4] Danskin J.M., The Theory of Max-Min and its Applications to Weapons Allocations Problems. Springer, New York, (1967).

[5] Demyanov V.F., Zabrodin I.S., Directional differentiability of a continual maximum function of quasidifferentiable functions, Math. Program. Study 29, pp. 108–117, (1986).

[6] H. Kawasaki, "An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems" *Mathematical Programming,* vol. 41, pp. 73–96, (1988).

[7] H. Kawasaki, "The upper and lower second order directional derivatives of a sup-type function" *Mathematical Programming,* vol. 41, pp. 327–339, (1988).

[8] H. Kawasaki, "Second order necessary optimality conditions for minimizing a sup-type function" *Mathematical Programming,* vol. 49, pp. 213–229, (1991).

[9] H. Kawasaki, "Second-order necessary and sufficient optimality conditions for minimizing a sup-type function" *Applied Mathematics and Optimization,* vol 26, pp. 195–220, (1992).

[10] Nürnberger G., Approximation by Spline Functions. Springer, New York, (1989).

[11] Nürnberger G., Schumaker L., Sommer M., Strauss H., Uniform approximation by generalized splines with free knots, J. Approx. Theory, vol. 59, pp. 150–169, (1989).

[12] Seeger A., Second order directional derivatives in parametric optimization problems, Math. Oper. Res. vol. 13, pp. 124–139, (1988).